

ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Пособие

для студентов специальностей

1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,

1-70 04 02 «Теплогасоснабжение, вентиляция

и охрана воздушного бассейна»,

1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение

и охрана водных ресурсов»,

1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»

В 3 частях

Часть 2

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Республики Беларусь по образованию
в области строительства и архитектуры*

Минск
БНТУ
2020

УДК 531.382+531.14(075.8)

ББК 22.213я7

Д46

С о с т а в и т е л и:

А. К. Есман, П. Г. Кужир, Н. П. Юркевич,

Г. К. Савчук, Г. Л. Зыков

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра общей физики БГУ,

заведующий кафедрой общей физики БГУ *А. И. Слободянюк*;

ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника»,
доктор физико-математических наук, гл. н. с. *С. П. Жавый*

Д46

Динамика поступательного и вращательного движения : пособие для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»: в 3 ч. / А. К. Есман [и др.]. – Минск: БНТУ, 2020. – Ч. 2. – 57 с.

ISBN 978-985-583-052-9 (Ч. 2).

В пособии представлены материалы для проведения лабораторных работ по изучению динамики вращательного движения. Подробно представлена теория гравитационного взаимодействия. Описаны основные характеристики гравитационного поля. Представлен экспериментальный метод определения ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника. Рассмотрены основные понятия и закономерности вращательного движения материальной точки и твердого тела. Представлена методика экспериментального исследования зависимости момента инерции твердого тела от распределения его массы относительно оси вращения.

УДК 531.382+531.14(075.8)

ББК 22.213я7

ISBN 978-985-583-052-9 (Ч. 2)

ISBN 978-985-583-005-5

© Белорусский национальный
технический университет, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1	4
1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА	4
1.1. Гравитационное взаимодействие и его свойства	4
1.2. Закон всемирного тяготения	5
1.3. Гравитационное поле и его характеристики	6
1.4. Вращение Земли и его влияние на движение тел по поверхности Земли	12
1.5. Методы определения ускорения свободного падения	17
1.6. Метод оборотного маятника	18
1.7. Порядок выполнения работы	24
1.8. Контрольные вопросы	26
Лабораторная работа № 2	27
2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЕГО МАССЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ	27
2.1. Момент силы и момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки и относительно оси	27
2.2. Момент инерции. Теорема Штейнера	34
2.3. Основное уравнение динамики вращательного движения для материальной точки	41
2.4. Связь момента импульса материальной точки относительно оси с ее угловой скоростью	43
2.5. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела	44
2.6. Метод определения момента инерции маховика	47
2.7. Порядок выполнения работы	52
2.8. Контрольные вопросы	55
Литература	57

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

Цель работы: изучить гравитационное взаимодействие и его свойства, определить ускорение свободного падения с помощью оборотного маятника.

Оборудование и материалы: электронный секундомер; блок питания электромагнита; пусковое устройство, управляющее электромагнитом и секундомером.

1.1. Гравитационное взаимодействие и его свойства

Гравитация – это фундаментальное взаимодействие в природе, которому подвержены все материальные объекты.

Гравитационное взаимодействие обладает следующими основными свойствами.

1) Действует на все материальные объекты. Все, что имеет массу – а масса присуща любому виду материи – испытывает гравитационное взаимодействие.

2) Обладает бесконечным радиусом действия. Гравитационное взаимодействие простирается практически на неограниченное расстояние.

3) Обладает универсальностью действия, которое заключается в том, что гравитационные силы сообщают всем телам одинаковое ускорение независимо от их состава, строения и массы.

4) Гравитационное взаимодействие невозможно экранировать. Это взаимодействие свободно передается через любые тела и преграды и является всепроникающим.

5) Является самым слабым взаимодействием из всех известных взаимодействий в природе. Среди других типов вза-

имодействий – сильного, слабого и электромагнитного – гравитационное взаимодействие не играет практически никакой роли применительно к микрообъектам, таким как элементарные частицы. Например, электрическая сила взаимного отталкивания двух электронов превосходит силу их гравитационного тяготения более чем в 10^{42} раз.

6) Обладает свойством притяжения.

Гравитационное взаимодействие было первым взаимодействием, описанным математической теорией. Общее поведение гравитации в классической механике описывается законом всемирного тяготения, открытым Исааком Ньютоном в 1687 году.

1.2. Закон всемирного тяготения

Мерой гравитационного взаимодействия является сила тяготения или гравитационная сила, величина которой определяется законом всемирного тяготения.

Закон всемирного тяготения Ньютона гласит: сила притяжения двух тел прямо пропорциональна массам этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2},$$

где m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел;

R – расстояние между центрами масс тел;

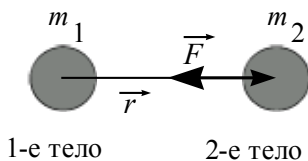
G – гравитационная постоянная.

В векторном виде закон всемирного тяготения записывается как

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \quad (1.1)$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный от центра масс одного тела к центру масс другого (рис. 1.1);

r – модуль радиус-вектора, который равен расстоянию R .



1-е тело

2-е тело

Физический смысл гравитационной постоянной G заключается в следующем: гравитационная постоянная – это физическая величина, численно равная силе взаимного тяготения двух тел единичной массы, находящихся на единичном расстоянии друг от друга.

Экспериментально получено, что

$$G = (6,6720 \pm 0,0041) \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2.$$

Закон всемирного тяготения выполняется для материальных точек и шарообразных тел.

Если взаимодействующие тела имеют произвольные форму и размеры, то сила их гравитационного взаимодействия определяется формулой

$$\vec{F} = -G \int_{V_1} \rho_1 dV_1 \int_{V_2} \frac{\rho_2}{r^3} \vec{r} dV_2,$$

где dV_1 и dV_2 – элементы объемов первого и второго тел, соответственно;

ρ_1 и ρ_2 – плотности тел.

Интегрирование проводится по объемам взаимодействующих тел.

1.3. Гравитационное поле и его характеристики

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется посредством создаваемого ими гравитационного поля,

которое называется также **полем тяготения**. Гравитационное поле является одним из видов физического поля, посредством которого осуществляется гравитационное притяжение тел, например, Солнца и планет Солнечной системы, планет и их спутников, Земли и находящихся на ней или вблизи нее тел.

Если в гравитационное поле поместить материальное тело, то на него будет действовать сила, пропорциональная массе этого тела.

Силовой характеристикой гравитационного поля является напряженность поля. **Напряженность гравитационного поля** – это векторная величина, численно равная отношению силы F , действующей со стороны поля на помещенное в него тело, к массе m этого тела

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Напряженность гравитационного поля не зависит от массы тела, а зависит от координат (x, y, z) точки поля, в которую помещено тело.

Гравитационное поле называется **стационарным**, если создающие его тела неподвижны относительно системы отсчета, выбранной для описания поля. Напряженность стационарного гравитационного поля не зависит от времени и является функцией только координат.

Пусть тело массой M создает гравитационное поле, в которое помещено тело массой m . Из второго закона Ньютона следует, что, под действием сил гравитационного поля, тело массой m приобретает ускорение \vec{a} , равное напряженности этого поля

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{g}. \quad (1.2)$$

Из закона всемирного тяготения (1.1), с учетом формулы (1.2), получаем, что вектор напряженности гравитационного поля, создаваемого неподвижным телом массой M :

$$\vec{g} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r},$$

где \vec{r} – радиус-вектор рассматриваемой точки поля.

Поле сил называется **центральный**, если направление линии действия силы проходит через неподвижные центры взаимодействия тел и величина силы зависит от расстояния между этими центрами. Гравитационное поле является **центральным**.

Поле называется **однородным**, если напряженность во всех точках поля одинакова по величине и по направлению.

Поле называется **потенциальным**, если работа, совершаемая действующими силами поля при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от формы траектории.

Если тело массой m перемещается в гравитационном поле из точки 1 в точку 2 (рис. 1.2), то работа, совершенная силами гравитационного притяжения:

$$\begin{aligned} A &= \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = GmM \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -G \frac{mM}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = \\ &= -G \frac{mM}{r_2} + G \frac{mM}{r_1} = GmM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что работа определяется только начальным и конечным положениями тела. Если тело в гравитационном поле движется по замкнутому контуру, то $r_1 = r_2$ и, согласно (1.3), работа сил поля $A = 0$.

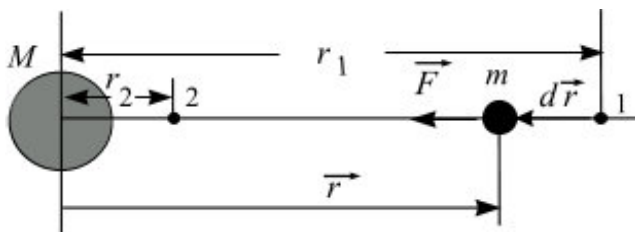


Рис. 1.2. К определению работы сил гравитационного поля

Из (1.3) вытекает **критерий потенциальности гравитационного поля**: чтобы поле было потенциальным необходимо и достаточно, чтобы работа сил поля по любому замкнутому контуру была равна нулю.

Любое тело в гравитационном поле обладает **потенциальной энергией**

$$W_{\Pi} = \int_r^{\infty} \vec{F} d\vec{r} = -G \frac{mM}{r}.$$

Из формулы для потенциальной энергии следует, что на бесконечности значение потенциальной энергии равно нулю.

Гравитационные поля удовлетворяют **принципу суперпозиции**: результирующий вектор напряженности гравитационного поля системы тел равен векторной сумме напряженностей гравитационных полей каждого из тел в отдельности:

$$\vec{g} = \sum_{i=1}^n \vec{g}_i,$$

где \vec{g}_i – вектор напряженности поля i -го тела в рассматриваемой точке пространства.

В силу потенциальности гравитационного поля для его описания можно ввести энергетическую характеристику – потенциал.

Потенциалом гравитационного поля называется скалярная величина φ , равная отношению потенциальной энергии W_{Π} тела, помещенного в данную точку поля, к его массе

$$\varphi = \frac{W_{\Pi}}{m}.$$

Для потенциалов поля справедлив **принцип суперпозиции**: результирующий потенциал гравитационного поля системы тел равен алгебраической сумме потенциалов гравитационных полей каждого из тел в отдельности

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i,$$

где φ_i — потенциал поля i -го тела в рассматриваемой точке пространства.

Получим связь между потенциалом и вектором напряженности гравитационного поля.

Элементарная работа, совершаемая силами гравитационного поля при малом перемещении $d\vec{r}$ тела массой m в этом поле:

$$\delta A = (\vec{F} d\vec{r}) = m(\vec{g} d\vec{r}). \quad (1.4)$$

С другой стороны, эта работа равна убыли потенциальной энергии тела в гравитационном поле

$$\delta A = -dW_{\Pi} = -md\varphi. \quad (1.5)$$

Приравнивая правые части выражений (1.4) и (1.5), получаем связь потенциала и напряженности гравитационного поля

$$d\varphi = -(\vec{g} d\vec{r}) = -(g_x dx + g_y dy + g_z dz), \quad (1.6)$$

где $\vec{g} = g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k}$;

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}.$$

Из выражения (1.6) следует, что проекции вектора напряженности на координатные оси x, y, z равны

$$g_x = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad g_y = -\frac{d\varphi}{dy}, \quad g_z = -\frac{d\varphi}{dz}. \quad (1.7)$$

Тогда вектор напряженности $\vec{g} = g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k}$ примет вид

$$\vec{g} = -\frac{d\varphi}{dx} \vec{i} - \frac{d\varphi}{dy} \vec{j} - \frac{d\varphi}{dz} \vec{k}. \quad (1.8)$$

Если изменение потенциала происходит в результате малого перемещения только вдоль одного направления, например, вдоль оси x или вдоль осей y или z , то, обозначив это направление через dr , получим

$$g = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Величина $\frac{d\varphi}{dr}$ называется **градиентом потенциала** и характеризует изменение потенциала в расчете на единицу длины в направлении перемещения в поле тяготения.

В общем случае потенциал является функцией трех переменных x, y, z : $\varphi = f(x, y, z)$. Однако, при дифференцировании φ , например, по переменной x переменные y и z считаются постоянными величинами, поэтому полные производные заменяются частными производными. Тогда выражение (1.8) получим в виде

$$\vec{g} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = -\text{grad}\varphi,$$

где $\text{grad}\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k})$ – градиент потенциала φ .

Знак минус в выражении показывает, что вектор напряженности \vec{g} направлен в сторону убыли потенциала.

Таким образом, напряженность гравитационного поля численно равна и противоположна по направлению градиенту потенциала этого поля.

1.4. Вращение Земли и его влияние на движение тел по поверхности Земли

При условии, что Земля имеет форму шара и ее масса распределена сферически симметрично, сила тяготения (гравитационная сила) тела массой m к Земле направлена к центру Земли, а ее модуль вычисляется как

$$F_{\text{гр}} = G \frac{mM_3}{R^2}, \quad (1.9)$$

где M_3 – масса Земли;

R – расстояние от тела до центра Земли.

Учтем, что размеры любого тела на Земле ничтожно малы по сравнению с радиусом Земли. Суточное вращение Земли вокруг своей оси приводит к тому, что тело на поверхности Земли получает центростремительное ускорение

$$a_{\text{ц}} = \omega^2 r, \quad (1.10)$$

вектор которого лежит в плоскости круга и направлен перпендикулярно оси вращения по радиусу r окружности (рис. 1.3).

Поскольку в формулу (1.10) для центростремительного ускорения угловая скорость входит во второй степени, то ускорение $a_{ц}$ не зависит от направления вращения.

Согласно формуле (1.10) ускорение достигает наибольшего значения на экваторе. На полюсах центростремительное ускорение равно нулю, так как полюса неподвижны.

Тело удерживается на поверхности Земли центростремительной силой

$$\vec{F}_{ц} = m\vec{a}_{ц} = \vec{F}_{гр} + \vec{N}, \quad (1.11)$$

где \vec{N} – вектор силы реакции земной поверхности или силы реакции опоры;

$\vec{F}_{гр}$ – вектор гравитационной силы.

Составляющую силы всемирного тяготения, действующую на тело со стороны Земли и сообщающую телу ускорение свободного падения, называют *силой тяжести*.

Из рис. 1.3 видно, что сила тяжести $F_{тяж}$ равна по модулю силе реакции опоры N . Согласно (1.11) сила тяжести на полюсах равна гравитационной силе $F_{гр}$, поскольку на полюсах Земли $F_{ц} = 0$.

На широте местности φ силу тяжести можно определить по теореме косинусов

$$F_{тяж}^2 = F_{гр}^2 + F_{ц}^2 - 2F_{гр}F_{ц} \cos \varphi. \quad (1.12)$$

Центростремительная сила на широте φ

$$F_{ц} = m\omega^2 R \cos \varphi,$$

где R – расстояние от центра Земли до тела на ее поверхности.

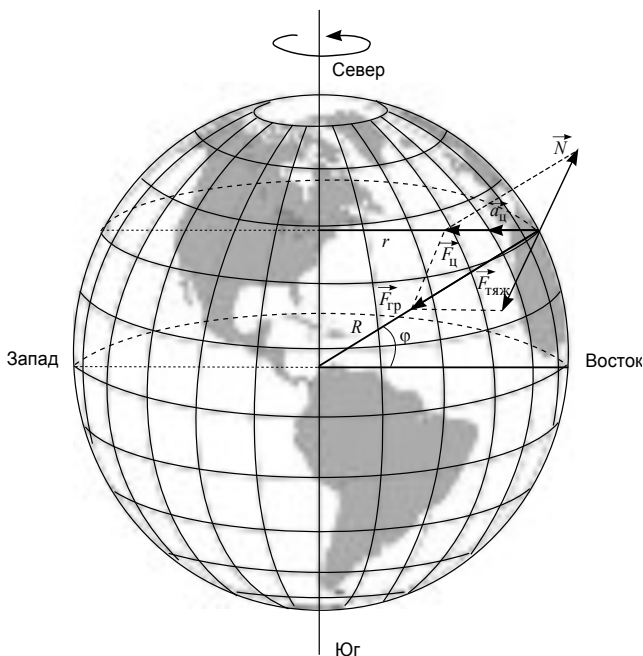


Рис. 1.3. Планета Земля и ее вращение

Величина центробежной силы $F_{\text{ц}}$ намного меньше гравитационной силы ($F_{\text{ц}} < 4 \cdot 10^{-2} F_{\text{гр}}$), поэтому в (1.12) слагаемым $F_{\text{ц}}^2$ можно пренебречь.

Тогда

$$F_{\text{тяж}}^2 \approx F_{\text{гр}}^2 - 2F_{\text{гр}}F_{\text{ц}} \cos \varphi = F_{\text{гр}}^2 \left(1 - \frac{2F_{\text{ц}} \cos \varphi}{F_{\text{гр}}}\right)$$

или

$$F_{\text{тяж}} \approx F_{\text{гр}} \sqrt{1 - \frac{2F_{\text{ц}} \cos \varphi}{F_{\text{гр}}}}. \quad (1.13)$$

Таким образом, из выражения (1.13) следует, что вращение Земли оказывает влияние на величину силы тяжести. При этом сила тяжести отличается от гравитационной силы по величине и направлению, однако данное отличие является незначительным.

Вращение Земли вокруг своей оси и Солнца происходит непрерывно. Многие явления зависят от этого движения. Так, день сменяет ночь, один сезон – другой, в разных областях устанавливается различный климат.

Поскольку Земля вращается вокруг своей оси, то система отсчета, связанная с ее поверхностью, является неинерциальной.

Влияние вращения системы отсчета, связанной с поверхностью Земли, учитывается добавлением к действующим на тело физическим силам одной из сил инерции (силы Кориолиса) (рис. 1.4).

Сила Кориолиса определяется как

$$\vec{F}_k = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}], \quad (1.15)$$

где m – масса тела;

\vec{v} – вектор скорости тела относительно Земли;

$\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения Земли.

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения Земли (рис. 1.4). Вектор силы Кориолиса \vec{F}_k перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора \vec{v} и $\vec{\omega}$, а ее направление определяется по правилу буравчика. Модуль силы Кориолиса

$$F_k = 2mv\omega \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами \vec{v} и $\vec{\omega}$.

Предположим, что тело движется в северном полушарии вдоль меридиана с юга на север (рис. 1.4). В данном случае вектор скорости движения тела \vec{v} составляет с вектором уг-

ловой скорости $\vec{\omega}$ угол $\alpha < 90^\circ$. Сила Кориолиса направлена по касательной к поверхности Земли вправо относительно движения тела. В южном полушарии, при движении тела на юг, вектор \vec{v} составляет тупой угол с вектором $\vec{\omega}$, и сила Кориолиса будет направлена влево относительно направления движения тела.

Существование силы Кориолиса проявляется в ряде природных явлений.

Например, реки, текущие в северном полушарии, стремясь отклониться в своем течении вправо, сильно подмывают правый берег, в южном полушарии – левый берег.

Такое же отклонение происходит при полете артиллерийских снарядов и на железных дорогах. Если движение поезда происходит в одном направлении, то в северном полушарии сильнее изнашивается правый рельс, а в южном – левый.

Сила Кориолиса проявляется также и в движении воздушных масс, что приводит к образованию пассатных ветров и циклонов.

Отклонение свободно падающих тел к востоку от вертикали и отклонение плоскости качаний маятника также происходят под действием силы Кориолиса. Наблюдение отклонения плоскости качаний маятника было впервые проведено Фуко в 1851 году и послужило прямым доказательством существования суточного вращения Земли.

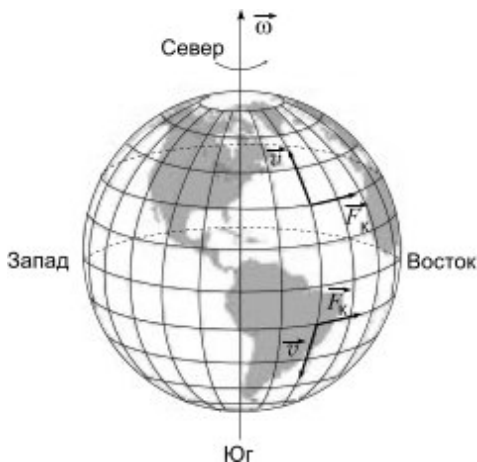


Рис. 1.4. Направление сил Кориолиса, действующих на тела, движущиеся по поверхности Земли

1.5. Методы определения ускорения свободного падения

Сила тяжести, с которой тело притягивается к Земле под действием ее гравитационного поля, сообщает телу ускорение.

Движение, которое совершает тело под действием силы тяжести без учета сил сопротивления, называется **свободным падением**.

Ускорение свободного падения – это ускорение, сообщаемое телу силой тяжести.

Наиболее точные измерения ускорения свободного падения выполняются с помощью косвенных методов. Многие из них основаны на использовании формул для периода колебаний математического и физического маятников.

Математическим маятником называется материальная точка массой m , подвешенная на невесомой, нерастяжимой нити и совершающая колебание в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}, \quad (1.16)$$

где l – длина маятника (длина нити);

g – ускорение свободного падения.

Ускорение g можно вычислить, измерив T и l . Погрешность определения ускорения свободного падения g в этом случае связана с тем, что реальный маятник, используемый в лабораторных условиях, может только с некоторым приближением рассматриваться как математический: чем больше l , тем точнее измерения.

Физическим маятником называется абсолютно твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси, не проходящей через его центр тяжести.

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (1.17)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса;

m – масса маятника;

l – расстояние от центра тяжести маятника до точки подвеса.

Величину $L = J/(ml)$ называют **приведенной длиной физического маятника**, которая равна длине такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.

Зная период T , массу m и момент инерции J физического маятника по формуле (1.17) можно определить ускорение свободного падения g . Массу маятника и период его колебаний можно измерить с очень высокой точностью, большие затруднения вызывает точность измерения момента инерции. Указанного недостатка лишен метод обратного маятника, в котором момент инерции исключен из расчетной формулы для вычисления ускорения свободного падения g .

1.6. Метод обратного маятника

Оборотный маятник используется для гравиметрической разведки, которая основана на измерении аномального гравитационного поля Земли. По аномальным значениям ускорения свободного падения обнаруживаются залегающие полезные ископаемые. Оборотный маятник используется также для определения ускорения свободного падения в данной точке земной поверхности и т. д.

Оборотным маятником называется физический маятник, центр качания которого расположен в пределах колеблющегося тела.

Центр качания – это точка (рис. 1.5, точка C_2), отстоящая от точки подвеса (точка C_1) на расстоянии приведенной длины L .

Центр качания маятника удовлетворяет условию сопряженности, который состоит в том, что, при перемене ролями точки подвеса и центра качания, период колебаний маятника остается неизменным.

Существуют разнообразные конструкции оборотного маятника. Оборотный маятник может представлять собой пластину с прорезью, в которой расположены два

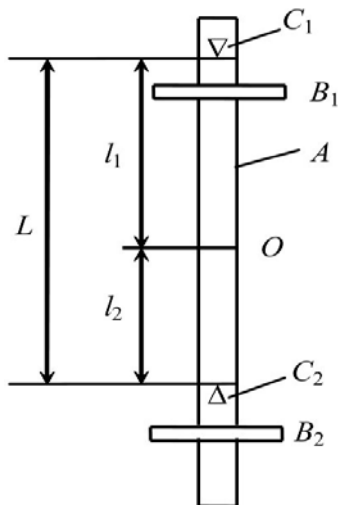


Рис. 1.5. Оборотный маятник

трехгранных ножа, острые ребра которых, при определенном их расположении, могут по очереди служить осями вращения. Ножи прикреплены к пластине так, что лезвия ножей находятся в одной плоскости с центром масс пластины на различных расстояниях от него.

Оборотный маятник, который используется в данной работе, выполнен в виде тонкого однородного стержня, длины L с двумя легкими подвижными призмами, на котором укреплены два массивных груза в виде дисков (рис. 1.5). Призмы можно перемещать по стержню и фиксировать с помощью винтов в различных точках стержня.

Метод оборотного маятника основан на том, что во всяком физическом маятнике можно найти такие две точки, что при последовательном подвешивании маятника за одну или другую, период колебаний его остается одним и тем же. Расстояние между этими точками представляет собой приведенную длину данного маятника.

Получим формулу для определения ускорения свободного падения в методе оборотного маятника.

По металлическому стержню A обратного маятника (рис. 1.5), диски B_1 , B_2 и опорные призмы C_1 и C_2 могут перемещаться и закрепляться в том или ином положении. Перемещая диски или опорные призмы, можно изменять период колебаний маятника.

Маятник подвешивают на призме C_1 и производят измерение периода его колебаний T_1 .

Затем маятник подвешивают на призме C_2 и измеряют период колебаний T_2 .

Допустим, имеется такое положение грузов, при котором периоды колебаний маятников T_1 и T_2 около призм C_1 и C_2 совпадают, т. е.

$$T_1 = T_2 = T = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{mgl_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{mgl_2}}. \quad (1.18)$$

Из (1.18) следует

$$J_1 = mgl_1 \frac{T^2}{4\pi^2}; \quad J_2 = mgl_2 \frac{T^2}{4\pi^2}. \quad (1.19)$$

По теореме Штейнера моменты инерции для первого и второго случая измерений соответственно будут равны

$$J_1 = J_0 + ml_1^2; \quad J_2 = J_0 + ml_2^2, \quad (1.20)$$

где J_0 – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс.

С учетом формул (1.19) и (1.20) можно записать

$$J_1 - J_2 = m(l_1^2 - l_2^2)$$

или

$$\frac{T^2 m g l_1}{4\pi^2} - \frac{T^2 m g l_2}{4\pi^2} = m (l_1^2 - l_2^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{T^2 g}{4\pi^2} &= l_1 + l_2, \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{l_1 + l_2}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Формула (1.21) аналогична формуле (1.17) для физического маятника.

Следовательно, величина $L = l_1 + l_2$ есть приведенная длина физического маятника, которая, как видно из рис. 1.5, равна расстоянию между призмами C_1 и C_2 , когда $T_1 = T_2$. Это расстояние легко может быть измерено с большой точностью.

Таким образом, определение ускорения свободного падения g с помощью обратного маятника сводится к измерению периодов T_1 и T_2 относительно призм C_1 и C_2 , достижению их равенства (с помощью перемещения призм), измерению расстояния $L = l_1 + l_2$ между призмами, и вычислению g по формуле

$$g = 4\pi^2 L / T^2.$$

Чтобы пояснить, как достичь равенства периодов T_1 и T_2 , исследуем, как зависит период колебаний от расстояния l между центром масс и осью качаний маятника. Согласно формулам (1.17) и (1.20), имеем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ml^2}{mgl}}.$$

Для того, чтобы определить при каком значении l период T будет минимальным, необходимо найти производную и приравнять ее к нулю:

$$\frac{dT}{dl} = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{2ml \cdot mgl - mg(J_0 + ml^2)}{(mgl)^2}}{4\pi \sqrt{\frac{J_0 + ml^2}{mgl}}} = \frac{m^2 l^2 g - mgJ_0}{4\pi (mgl)^2 \sqrt{\frac{J_0 + ml^2}{mgl}}} = \\ & = \frac{mg(ml^2 - J_0)}{4\pi (mgl)^{3/2} \sqrt{J_0 + ml^2}} = 0 \end{aligned}$$

или

$$mg(ml^2 - J_0) = 0. \quad (1.22)$$

Из (1.22) следует, что период T минимален (рис. 1.6) при

$$l_{\min} = \sqrt{J_0 / m}.$$

При $T > T_{\min}$ одно и то же значение T достигается при двух разных значениях l , одно из них больше, а другое меньше l_{\min} . Эти значения l_1 и l_2 и входят в формулу (1.21).

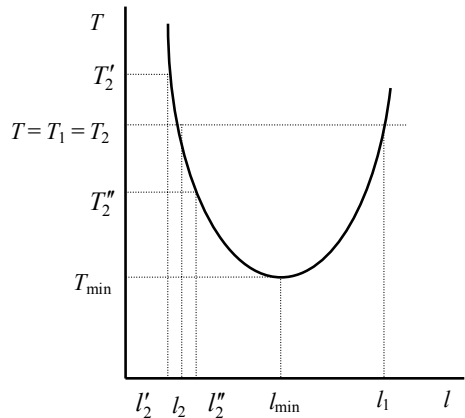


Рис. 1.6. Зависимость периода T от расстояния l

Вначале измеряется период колебаний маятника T_1 относительно призмы C_1 . Затем маятник переворачивается и измеряется период колебаний T_2 относительно призмы C_2 . Если при этом получится $T_2' > T_1$, то этому будет соответствовать $l_2' < l_2$. Для того, чтобы приблизить T_2'' и T_1 , необходимо увеличить l_2' . Для этого надо призму C_2 передвигать от середины к краю стержня. Если $T_2'' < T_1$, то призму C_2 надо будет передвинуть к середине стержня.

Анализ точности измерения g методом обратного маятника показывает, что погрешность измерения слабо зависит от точности, с которой выполняется равенство $T_1 = T_2$. Достаточно добиться того, чтобы периоды оказались равными друг другу с точностью 0,5 %.

Кроме того, для получения достаточной точности измерения, отношение l_1/l_2 не должно быть ни слишком малым, ни слишком большим, желательно, чтобы выполнялось условие $1,5 < l_1 / l_2 < 3$.

Вид экспериментальной установки, которая используется в лабораторной работе, представлен на рис. 1.7.

Оборотный маятник выполнен в виде стального стержня 8, на котором крепятся две призмы и два диска. Нижний кронштейн 5 вместе с фотометрическим датчиком 6 можно перемещать вдоль стержня. Фотоэлектрический датчик соединен с универсальным электронным секундомером 1, который измеряет число колебаний n и общее время этих колебаний t . Период колебаний определяется как

$$T = t/n.$$

Отвинчивая винт 7, верхний кронштейн 4 можно поворачивать вокруг колонки 3. Положение установки регулируется с помощью ножек 2.

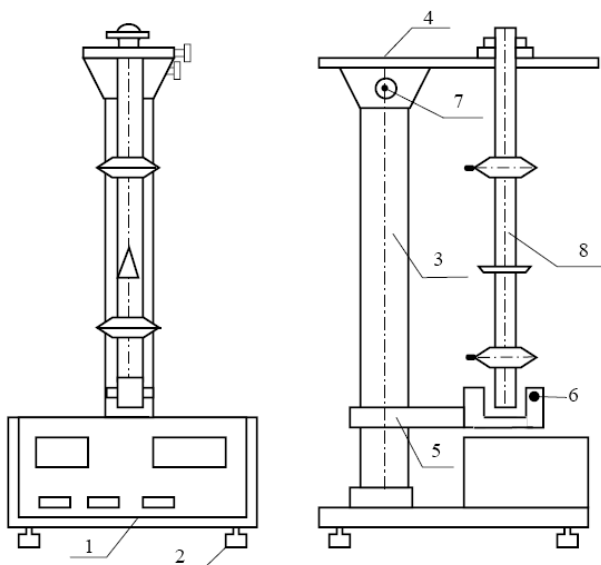


Рис. 1.7. Вид экспериментальной установки

1.7. Порядок выполнения работы

Измерения с обратным маятником проводятся в следующем порядке:

- 1) Поместите над датчиком обратный маятник, повернув верхний кронштейн на 180° .
- 2) Зафиксируйте диски на стержне, чтобы один из них находился вблизи конца стержня, а другой – вблизи его середины.
- 3) Закрепите маятник на верхнем кронштейне на призме, находящейся вблизи конца стержня, так, чтобы конец стержня пересекал оптическую ось фотоэлектрического датчика.
- 4) Отклоните маятник примерно на 5° от положения равновесия и придержите его рукой.
- 5) Отпустите маятник (маятник придет в движение).
- 6) Измерьте время t_1 10 колебаний маятника.

7) Определите период колебаний обратного маятника $T_1 = t_1/n$, где $n=10$.

8) Снимите маятник и закрепите его на второй призме.

9) Измерьте период T_2 , повторив пп. 4–7.

10) Сравните периоды T_2 и T_1 ; если $T_2 > T_1$, вторую призму переместите в направлении диска, находящегося в конце стержня; если $T_2 < T_1$, переместите ее в направлении середины стержня (положение дисков и первой призмы не менять).

11) Снова измерьте период T_2 и сравните его с величиной T_1 ; меняйте положение второй призмы до тех пор, пока значение периода T_2 не станет равным значению периода T_1 с точностью до 0,5 %.

12) Определите приведенную длину обратного маятника L , измеряя расстояние между призмами (по числу нарезок, которые нанесены через каждые 10 мм).

13) Вычислите ускорение свободного падения по формуле

$$g = 4\pi^2 L / T^2.$$

14) Вычислите абсолютные погрешности для периода $\Delta T = \Delta t / n$ (здесь Δt – погрешность измерения времени, оцениваемая исходя из точности прибора) и ускорения

$$\Delta g = g \left(\frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta T}{T} \right),$$

где ΔL – абсолютная погрешность измерения длины, оцениваемая по цене деления измерительной линейки.

15) По правилам округления произведите округление абсолютной погрешности Δg . Затем округлите значение g .

16) Запишите окончательный результат в виде $g \pm \Delta g$.

17) Сделайте выводы.

1.8. Контрольные вопросы

1. Назовите свойства гравитационного взаимодействия.
2. Сформулируйте закон всемирного тяготения. Каков физический смысл гравитационной постоянной?
3. Какое гравитационное поле называется стационарным, центральным, потенциальным, однородным?
4. Дайте определения основным характеристикам гравитационного поля: потенциалу и напряженности. Какова связь напряженности и потенциала поля тяготения?
5. Докажите, что гравитационное поле потенциально. Сформулируйте критерий потенциальности гравитационного поля.
6. Сформулируйте принципы суперпозиции для напряженности и потенциала гравитационного поля.
7. Дайте определение силы тяжести. Какое влияние оказывает на силу тяжести вращение Земли?
8. Как вычисляется сила Кориолиса, в каких природных явлениях проявляется ее действие?
9. Какое движение называется свободным падением?
10. Дайте определение ускорения свободного падения.
11. Что такое математический маятник, чему равен его период?
12. Дайте определение физического маятника. Что называют приведенной длиной физического маятника?
13. Как с помощью маятников можно измерить ускорение свободного падения?
14. С чем связана погрешность определения g с помощью математического и физического маятников?
15. Что собой представляет оборотный маятник?
16. В чем заключается метод оборотного маятника для определения ускорения свободного падения?

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЕГО МАССЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ

Цель работы: изучить основное уравнение динамики вращательного движения материальной точки и твердого тела, экспериментально определить момент инерции маховика, построить график зависимости момента инерции маховика от расстояния расположения грузов на его стержнях до оси вращения.

Оборудование и материалы: маховик с грузами, груз на нити, секундомеры.

2.1. Момент силы и момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки и относительно оси

Рассмотрим материальную точку массой m , движущуюся под действием силы \vec{F} . Так как на материальную точку может действовать не одна, а несколько сил, то под силой \vec{F} будем понимать вектор равнодействующей всех сил, действующих на материальную точку.

Положение материальной точки относительно неподвижной точки (неподвижного центра) O определяется радиус-вектором \vec{r} (рис. 2.1, а, б)

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где x, y, z – проекции вектора \vec{r} на координатные оси OX, OY, OZ .

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные вектора вдоль координатных осей OX, OY, OZ , соответственно.

Движущаяся материальная точка массой m обладает импульсом

$$\vec{p} = m\vec{v},$$

где \vec{v} – вектор скорости материальной точки.

Импульс материальной точки (тела) – это векторная физическая величина, численно равная произведению массы материальной точки (тела) на скорость.

Единица измерения – (кг·м)/с.

Вектором момента силы \vec{M}_O относительно неподвижной точки O называется векторное произведение радиус-вектора \vec{r} , проведенного из точки O к точке приложения силы, на вектор силы \vec{F} (рис. 2.1, а):

$$\vec{M}_O = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (2.1)$$

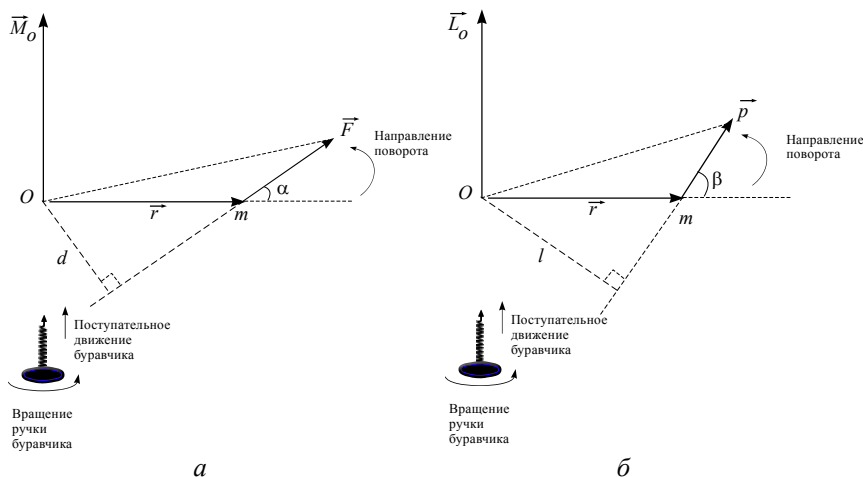


Рис. 2.1. Направления векторов относительно неподвижной точки O :
а – момента силы \vec{M}_O ; б – момента импульса \vec{L}_O

Вектор момента силы \vec{M}_O приложен в точке O и перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора \vec{r} и \vec{F} .

Тройка векторов \vec{M}_O , \vec{r} и \vec{F} образует правовинтовую систему: если смотреть с конца вектора момента силы \vec{M}_O , то поворот вектора \vec{r} к вектору \vec{F} должен происходить по наименьшему углу α против хода часовой стрелки.

Направление вектора момента силы \vec{M}_O относительно точки O определяется в соответствии с **правилом буравчика** (рис. 2.1, а): поворот ручки буравчика, помещенного в точку O , должен совпадать с поворотом радиус-вектора \vec{r} к вектору силы \vec{F} по наименьшему углу α между ними, тогда поступательное движение острия буравчика укажет направление вектора момента силы \vec{M}_O .

Студенту бывает удобнее для определения направления вектора момента силы относительно точки воспользоваться правилом правой руки: поворот четырех пальцев правой руки (рис. 2.2), расположенной перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора \vec{r} и \vec{F} , должен совпадать с поворотом радиус-вектора \vec{r} к вектору силы \vec{F} по наименьшему углу, тогда поднятый вверх большой палец укажет направление вектора момента силы.

Модуль вектора момента M_O силы F относительно точки O

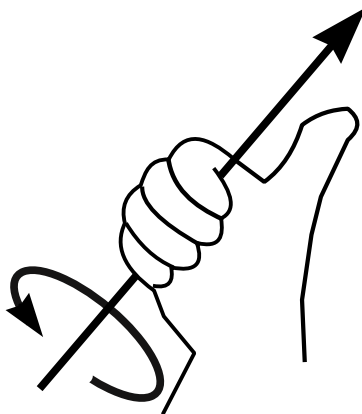


Рис. 2.2. Правило правой руки для определения направления вектора момента силы относительно точки

$$M_O = rF\sin\alpha = d \cdot F,$$

где α – угол между векторами \vec{r} и \vec{F} ;

$d = r \sin \alpha$ – плечо силы \vec{F} .

Плечо силы – это кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы.

Кратчайшее расстояние – это перпендикуляр, опущенный из точки O на линию действия силы (рис. 2.1, *a*).

Линией действия силы называется прямая, вдоль которой действует сила.

Момент силы \vec{M}_O не изменяется, если точку приложения силы перенести в любую другую точку, расположенную на линии действия силы.

Если под воздействием силы \vec{F} вращение материальной точки относительно центра O происходит против хода часовой стрелки, то момент силы считается положительным, если по ходу – то отрицательным. Поэтому

$$M_O = \pm d \cdot F.$$

Момент силы измеряется в Н·м.

Вектор момента импульса материальной точки относительно неподвижной точки O , его направление и значение определяются аналогично вектору момента силы относительно неподвижной точки.

Вектором момента импульса \vec{L}_O относительно неподвижной точки O (рис. 2.1, *б*) называется векторное произведение радиус-вектора \vec{r} , проведенного из точки O к материальной точке, на вектор импульса \vec{p} :

$$\vec{L}_O = [\vec{r}, \vec{p}]. \quad (2.2)$$

Вектор момента импульса \vec{L}_O приложен в точке O и перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора \vec{r} и \vec{p} .

Модуль вектора момента импульса L_O

$$L_O = r p \sin\beta = l p,$$

где β – угол между векторами \vec{r} и \vec{p} ;

$l = r \sin\beta$ – плечо вектора импульса \vec{p} (рис. 2.1, б).

Вектора \vec{L}_O , \vec{r} и \vec{p} образуют правовинтовую систему: поворот вектора \vec{r} к вектору \vec{p} по наименьшему углу β между ними определяет направление вектора \vec{L}_O в соответствии с правилом буравчика или правой руки (см. выше).

Единица измерения момента импульса – $(\text{кг} \cdot \text{м}^2)/\text{с}$.

Рассмотрим момент силы и момент импульса относительно произвольной оси.

Моментом силы относительно оси M_Z называется скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора момента силы $\vec{M}_O(\vec{F})$ относительно произвольной точки O , взятой на данной оси (рис. 2.3):

$$M_Z = M_O \cos\theta,$$

где θ – угол между вектором момента силы $\vec{M}_O(\vec{F})$ и осью OZ .

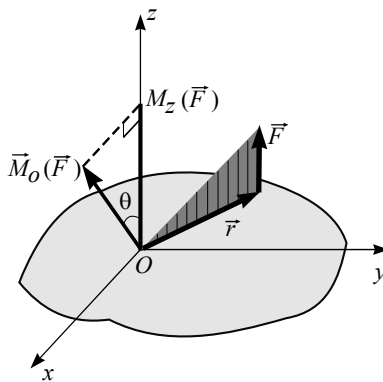


Рис. 2.3. К определению момента силы \vec{F} относительно оси z

Таким образом, чтобы определить момент силы относительно оси необходимо на оси выбрать произвольным образом точку и вычислить момент силы относительно выбранной точки. Вектор момента силы относительно точки будет перпендикулярен плоскости, в которой лежат радиус-вектор и вектор силы (на рис. 2.3 эта плоскость заштрихована). Проекция вектора момента силы, вычисленного относительно выбранной точки, на заданную ось и будет моментом силы относительно оси.

Момент силы относительно оси может быть определен несколькими способами.

Рассмотрим основные способы вычисления момента силы относительно оси.

1. Аналитический способ. Используя правило вычисления векторного произведения через определитель

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \left[\vec{r}, \vec{F} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

получаем момент силы в проекциях на координатные оси OX , OY , OZ

$$\begin{aligned} M_x(\vec{F}) &= yF_z - zF_y, \\ M_y(\vec{F}) &= zF_x - xF_z, \\ M_z(\vec{F}) &= xF_y - yF_x, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где x, y, z – координаты точки приложения вектора силы \vec{F} ;

F_x, F_y, F_z – проекции вектора силы \vec{F} на оси OX, OY, OZ , соответственно.

2. Геометрический способ.

Моментом силы относительно оси M_Z называется момент проекции силы \vec{F}_α на плоскость α , перпендикулярную этой оси, относительно точки пересечения O данной оси с плоскостью α (рис. 2.4):

$$M_Z = F_\alpha d,$$

где d – плечо силы F_α относительно точки O .

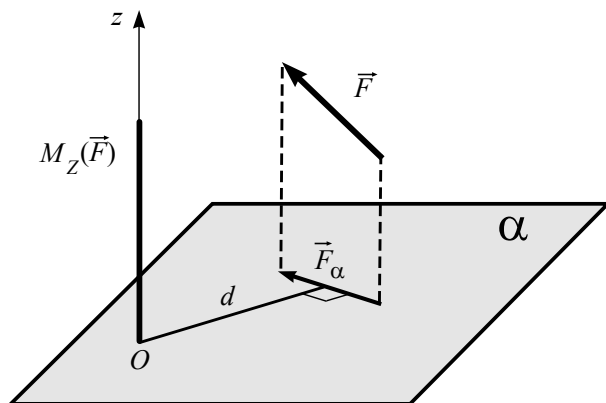


Рис. 2.4. К определению геометрическим способом момента силы M_Z относительно оси z

В рассматриваемом способе для вычисления момента силы относительно оси необходимо провести плоскость α (рис. 2.4), перпендикулярную данной оси, спроецировать вектор силы \vec{F} на эту плоскость и вычислить момент проекции \vec{F}_α относительно точки O – точки пересечения данной оси с плоскостью (рис. 2.4).

Для практического использования (расчеты равновесия строительных конструкций, равновесия балок и т. д.) чаще всего используется геометрический способ.

Эквивалентность двух рассмотренных способов вытекает из равенств

$$M_Z(\vec{F}) = xF_y - yF_x = xF_{\alpha y} - yF_{\alpha x},$$

где $F_{\alpha x}$ и $F_{\alpha y}$ – проекции вектора \vec{F}_α на оси OX и OY , соответственно.

Момент силы относительно оси считается положительным, если смотреть навстречу направлению оси и видеть проекцию силы, стремящуюся повернуть плоскость α в направлении против хода часовой стрелки.

2.2. Момент инерции. Теорема Штейнера

Тело (материальная точка) имеет момент инерции относительно любой оси независимо от того, вращается оно или покоится по аналогии с тем, как любое тело имеет массу независимо от того, движется оно поступательно или находится в покое.

Моментом инерции материальной точки массой m относительно оси называется величина

$$J = mR^2,$$

где R – расстояние от материальной точки до оси.

Для определения момента инерции твердого тела разбивают тело на элементы массами m_i (рис. 2.5). Для каждой элементарной массы m_i вычисляется свой момент инерции $J_i = m_i R_i^2$, затем производится суммирование по всем элементарным массам тела.

Моментом инерции твердого тела называется величина

$$J = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2, \quad (2.4)$$

где n – число элементов массы m_i , на которое разбивается тело;

m_i – масса i -го элемента твердого тела;

R_i – расстояние от i -го элемента массы твердого тела до оси (рис. 2.5).

Таким образом, момент инерции есть величина аддитивная – момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей.

Если элемент массы m_i будет бесконечно малой величины, то его обозначают dm и в выражении (2.4) от суммирования необходимо перейти к интегрированию

$$J = \int_m R^2 dm. \quad (2.5)$$

Выразим элемент массы dm через его плотность ρ и элементарный объем dV :

$$dm = \rho dV.$$

Тогда из выражения (2.5) получим формулу для определения момента инерции твердых тел относительно любой оси с произвольным распределением массы по объему:

$$J = \int_V \rho R^2 dV. \quad (2.6)$$

Формулы (2.5) и (2.6) используются на практике для расчета моментов инерции твердых тел.

Момент инерции является мерой инертности тела во вращательном движении. В этом отношении момент инерции по-

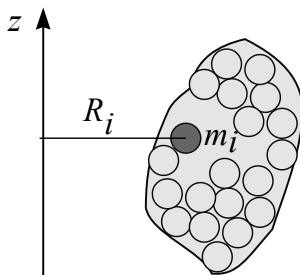


Рис. 2.5. К определению момента инерции твердого тела

добен массе тела, которая является мерой его инертности при поступательном движении. Т. е. момент инерции показывает, насколько «трудно» тело повернуть, привести его во вращение из состояния покоя или остановить вращающееся тело.

Момент инерции тела зависит от выбора оси. Чаще всего определяют моменты инерции любого тела с произвольным распределением массы относительно трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через центр масс тела. Как правило, эти оси выбираются с учетом формы и симметрии тела.

Рассмотрим пример применения формулы (2.5) для определения момента инерции тонкого однородного стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно стержню.

Выделим элемент массы стержня dm длиной dx , расположенный на расстоянии x от оси вращения (рис. 2.6). Поскольку стержень однороден, то dm можно представить в виде

$$dm = \frac{m}{l} dx, \quad (2.7)$$

где $\frac{m}{l}$ – масса единицы длины стержня.

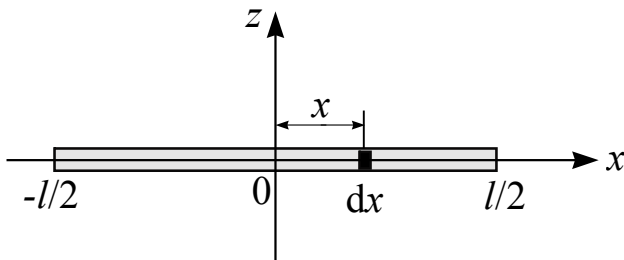


Рис. 2.6. К определению момента инерции тонкого однородного стержня

В формулу (2.6) подставим выражение (2.7) и проинтегрируем в пределах от $-\frac{l}{2}$ до $\frac{l}{2}$. Получим

$$J_z = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{m}{3l} \left(\frac{l^3}{8} - \left(-\frac{l^3}{8} \right) \right) = \frac{ml^2}{12}.$$

Таким образом, момент инерции тонкого однородного стержня J_z относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню, зависит от массы m и длины l стержня.

Момент инерции тела относительно оси, не проходящей через центр масс тела, может быть вычислен на основе теоремы Штейнера.

Теорема Штейнера: момент инерции тела J относительно любой произвольной оси равен сумме момента инерции J_C относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния a между осями:

$$J = J_C + ma^2.$$

Доказательство теоремы.

Рассмотрим ось Z , которая не проходит через центр масс C тела (рис. 2.7). Проведем через центр масс тела ось NN' , параллельную данной оси Z .

Разобьем твердое тело на множество элементов, число которых равно n . Выберем элемент массой m_i , лежащий в плоскости перпендикулярной оси NN' . Тогда положение элемента массы m_i относительно оси Z будет определяться вектором \vec{r}_i , а относительно оси NN' – вектором \vec{R}_i . Вектор \vec{a} – это вектор,

проведенный из точки O в точку O' . По модулю вектор \vec{a} равен расстоянию между осями. Вектора \vec{r}_i , \vec{R}_i и \vec{a} лежат в одной плоскости, перпендикулярной осям Z и NN' .

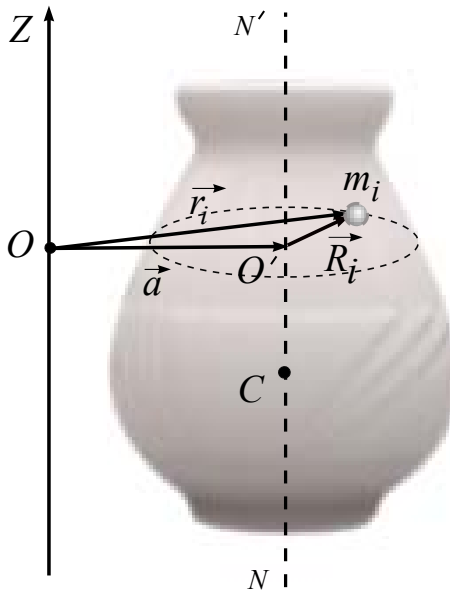


Рис. 2.7. К доказательству теоремы Штейнера

Из рис. 2.7 видно, что

$$\vec{R}_i + \vec{a} = \vec{r}_i.$$

Момент инерции J_i элемента массы m_i относительно оси Z по определению равен

$$J_i = m_i r_i^2,$$

где $r_i^2 = (\vec{R}_i + \vec{a})^2 = R_i^2 + 2\vec{R}_i \vec{a} + a^2.$

Тогда момент инерции всего тела относительно оси Z , используя свойство аддитивности момента инерции, можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 J_Z &= \sum_{i=1}^n I_{iZ} = \sum_{i=1}^n m_i (R_i^2 + 2\vec{R}_i \vec{a} + a^2) = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i 2\vec{R}_i \vec{a} + \sum_{i=1}^n m_i a^2 = \\
 &= J_C + 2 \sum_{i=1}^n m_i \vec{R}_i \vec{a} + a^2 \sum_{i=1}^n m_i = J_C + 2 \sum_{i=1}^n m_i \vec{R}_i \vec{a} + a^2 m = \\
 &= J_C + 2\vec{a} \sum_{i=1}^n m_i \vec{R}_i + a^2 m,
 \end{aligned}$$

$$J_Z = J_C + 2\vec{a} \sum_{i=1}^n m_i \vec{R}_i + a^2 m, \quad (2.8)$$

где $J_C = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$ – момент инерции тела относительно оси

NN' , проходящей через центр масс;

$$\sum_{i=1}^n m_i = m \text{ – масса всего тела.}$$

Свяжем начало системы координат, одной из осей которой является ось NN' , с центром масс тела. Радиус-вектор центра масс \vec{r}_C в системе координат с началом в центре масс $\vec{r}_C = 0$.

Используя определение радиус-вектора центра масс твердого тела, имеем

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{R}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = 0.$$

Откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{R}_i = 0.$$

Следовательно, выражение (2.8) окончательно можно записать в виде

$$J = J_C + ma^2.$$

Теорема Штейнера доказана.

Рассмотрим простейший пример применения теоремы Штейнера.

Пусть ось OZ' проходит через один из краев стержня (рис. 2.8) массой m и длиной l . Найдем момент инерции стержня относительно оси OZ . Проводим ось NN' через центр масс C параллельно данной оси и применяем теорему Штейнера:

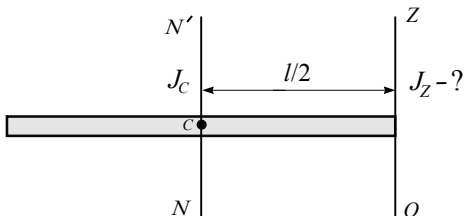


Рис. 2.8. К определению момента инерции стержня относительно оси, проходящей через его край

$$J_Z = J_C + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

Таким образом, теорема Штейнера позволяет вычислять моменты инерции тел относительно любых осей, не проходящих через центр масс, если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно данной.

2.3. Основное уравнение динамики вращательного движения для материальной точки

Пусть на материальную точку действуют произвольные внешние силы, вектор равнодействующей которых равен \vec{F} . Положение материальной точки относительно точки O определяется радиус-вектором \vec{r} (рис. 2.9).

Для движущейся материальной точки запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

или

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \quad (2.9)$$

Умножим обе части выражения (2.9) слева векторно на радиус-вектор \vec{r} .

Получим

$$\left[\vec{r}, \frac{m d\vec{v}}{dt} \right] = \left[\vec{r}, \vec{F} \right]. \quad (2.10)$$

Векторное произведение $\left[\vec{r}, \frac{m d\vec{v}}{dt} \right]$ можно заменить на $\frac{d}{dt} [\vec{r}, m \vec{v}]$. Покажем справедливость такой замены:

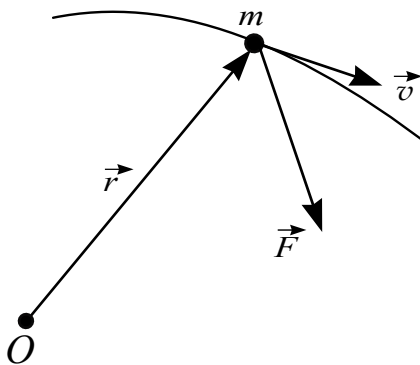


Рис. 2.9. Движение материальной точки массой m относительно неподвижной точки O

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}, m\vec{v}] = \left[\vec{r}, \frac{m d\vec{v}}{dt} \right] + \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, m\vec{v} \right]. \quad (2.11)$$

Производная по времени от радиус-вектора \vec{r} есть вектор скорости материальной точки: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, и второе слагаемое в выражении (2.11)

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, m\vec{v} \right] = [\vec{v}, m\vec{v}] = 0, \text{ так как } \sin(\vec{v} \wedge \vec{p}) = \sin 0^\circ = 0.$$

Тогда из (2.11) получим

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}, m\vec{v}] = \left[\vec{r}, \frac{m d\vec{v}}{dt} \right].$$

С учетом того, что $\vec{p} = m\vec{v}$ – вектор импульса материальной точки, выражение (2.10), примет вид

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}] = \left[\vec{r}, \vec{F} \right].$$

Используя выражения (2.1) и (2.2) для вектора момента силы \vec{M}_O и вектора момента импульса \vec{L}_O , получим основное уравнение динамики вращательного движения для материальной точки: скорость изменения вектора момента импульса \vec{L}_O материальной точки относительно неподвижной точки O равна вектору момента всех сил \vec{M}_O , действующих на материальную точку, относительно данной точки O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O. \quad (2.12)$$

Таким образом, на основе уравнения (2.12) можно описать динамику вращательного движения материальной точки относительно любой неподвижной точки, выбранной в качестве начала отсчета заданной системы координат.

2.4. Связь момента импульса материальной точки относительно оси с ее угловой скоростью

Рассмотрим вращение материальной точки по окружности радиуса R вокруг оси OZ (рис. 2.10) с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Положение материальной точки относительно точки O определяется радиус-вектором \vec{r} . Вектор импульса \vec{p} материальной точки направлен за плоскость чертежа.

Так как вектора \vec{r} и \vec{p} взаимно перпендикулярны, то модуль вектора момента импульса

$$L_O = rp \sin 90^\circ = rp = mvr.$$

Проекция момента импульса на ось OZ будет равна

$$\begin{aligned} L_Z &= L_O \cos \alpha, \\ L_Z &= mvr \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из рис. 2.10 видно, что радиус окружности, по которой движется материальная точка

$$R = r \cos \alpha. \quad (2.14)$$

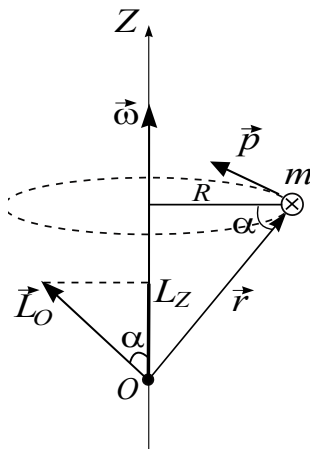


Рис. 2.10. Вращение материальной точки массой m вокруг неподвижной оси OZ

Учтем, что связь между линейной v и угловой ω скоростями определяется выражением

$$v = \omega R. \quad (2.15)$$

Подставляя выражения (2.14), (2.15) в формулу (2.13), получим связь проекции момента импульса материальной точки на ось вращения с ее угловой скоростью ω :

$$L_Z = mR^2\omega. \quad (2.16)$$

Можно показать, что связь вектора момента импульса \vec{L}_O материальной точки и вектора ее угловой скорости $\vec{\omega}$ относительно точки O определяется соотношением

$$\vec{L}_O = mR^2\vec{\omega} \text{ или } \vec{L}_O = J\vec{\omega}, \quad (2.17)$$

где $J = mR^2$ – момент инерции материальной точки относительно оси.

2.5. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Рассмотрим твердое тело, на которое действуют n внешних сил, вращающееся относительно неподвижной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. В этом случае \vec{L}_O – момент импульса твердого тела относительно неподвижной точки O , и на основе выражения (2.17), суммируя по всем материальным точкам твердого тела, в векторном виде получаем

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \vec{\omega} = J_Z \vec{\omega}, \quad (2.18)$$

где $J_Z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$ – момент инерции твердого тела относительно оси OZ .

По форме выражение (2.18) для твердого тела совпадет с выражением (2.17) для материальной точки из-за аддитивности момента инерции и равенства угловых скоростей для всех точек вращающегося твердого тела.

Тогда уравнение (2.12) представляет собой **основное уравнение динамики вращательного движения** твердого тела: скорость изменения вектора момента импульса \vec{L}_O твердого тела относительно неподвижной точки O равна вектору суммарного момента всех внешних сил \vec{M}_O , действующих на твердое тело, относительно данной точки:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O, \quad (2.19)$$

где \vec{M}_O – вектор суммарного момента всех внешних сил, действующих на твердое тело относительно точки O , равный векторной сумме моментов \vec{M}_i каждой силы в отдельности:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i.$$

Необходимо, отметить, что в уравнении (2.19) под \vec{M}_O следует понимать вектор момента всех сил – как внешних, так и внутренних. Однако внутренние силы мы не принимаем во внимание, поскольку их полный момент относительно точки O равен нулю. Это следует из того, что внутренние силы, согласно третьему закону Ньютона, будут входить в уравнение попарно с противоположными знаками.

Подставим выражение для момента импульса \vec{L}_O из (2.17) в формулу (2.19):

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(J_Z \vec{\omega})}{dt} = J_Z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J_Z \vec{\varepsilon}.$$

где $\vec{\varepsilon}$ – вектор углового ускорения твердого тела при вращении относительно неподвижной оси.

Таким образом, основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела может быть записано в виде

$$\vec{M}_O = I_Z \vec{\varepsilon}.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения относительно оси записывается в виде

$$M_Z = I_Z \varepsilon_Z,$$

$$\frac{dL_Z}{dt} = M_Z,$$

где M_Z – проекции суммарного момента всех внешних сил, действующих на твердое тело, относительно оси;

L_Z – проекции момента импульса твердого тела относительно оси;

ε_Z – проекция углового ускорения твердого тела на ось вращения.

Из уравнения $\varepsilon_Z = \frac{M_Z}{J_Z}$ следует, что проекция углового

ускорения ε_Z твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси O , прямо пропорциональна проекции на ось вращения результирующего момента силы, действующей на тело, и обратно пропорциональна моменту инерции твердого тела относительно данной оси.

Если сравнивать вращательное и поступательное движения, то мы видим, что аналогом массы при вращательном движении является момент инерции, а аналогом силы – момент силы.

Основное уравнение динамики вращательного движения не изменяет своего вида (является инвариантом) в случае ускоренно движущихся осей при условии, что ось вращения проходит через центр массы тела и что её направление в пространстве остается неизменным.

2.6. Метод определения момента инерции маховика

Установка для определения момента инерции твердого тела в зависимости от его массы и ее распределения относительно оси вращения состоит из крестообразного маховика, вращающегося вокруг горизонтальной оси. Маховик представляет собой четыре взаимно перпендикулярных стержня l (рис. 2.11). Стержни закреплены на цилиндрическом валу 2 , на который может наматываться нить 3 с подвешенным к ее свободному концу грузом 4 массой m .

Чтобы изучить, как влияет распределение массы на момент инерции маховика относительно оси вращения, одновременно на стержни на одинаковом расстоянии до оси вращения надеваются и закрепляются винтом четыре одинаковых груза 5 . Грузы можно передвигать вдоль стержней, удаляя или приближая к оси вращения.

Вращая вал, нить с прикрепленным к ней грузом массой m наматывается на вал. Груз поднимается на заданную высоту h и удерживается на этой высоте электромагнитом на горизонтальной полочке 6 . При выключении электромагнита полочка 6 опускается, позволяя грузу 4 двигаться вниз, а это, в свою очередь, приводит к равноускоренному вращению маховика.

Рассмотрим отдельно движение маховика и движение груза 4 (рис. 2.11, *а*).

На маховик действуют два момента сил: момент силы натяжения нити M и момент силы трения $M_{\text{тр}}$, тормозящий вращение маховика (рис. 2.11, *б*). Предполагается, что суммарный момент сил, действующий на маховик, остается по-

стоянным в течение всего времени движения груза массой m вниз. Момент силы тяжести маховика относительно оси вращения равен нулю.

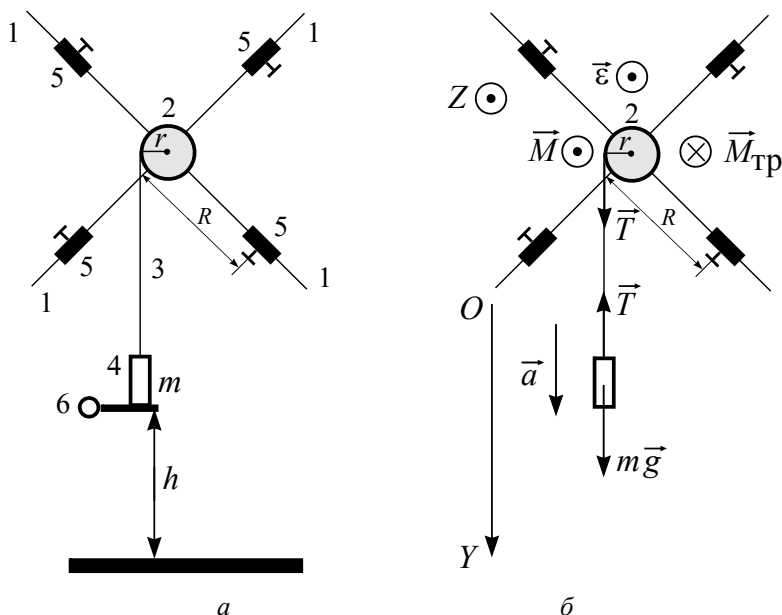


Рис. 2.11. Установка для определения момента инерции твердого тела:
 a – маховик с грузами; b – силы и моменты сил,
 действующие на груз 4 и маховик 1, соответственно

Под действием момента силы натяжения нити маховик совершает вращательное движение.

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения для маховика с учетом тормозящего его вращение момента:

$$M - M_{\text{тр}} = J\varepsilon, \quad (2.20)$$

где ε – угловое ускорение вращения маховика;
 J – момент инерции маховика.

Момент силы натяжения нити T определяется, как

$$M = rT,$$

где r – радиус вала, равный плечу силы T относительно оси вращения вала.

Груз 4 совершает поступательное движение с ускорением \vec{a} . Запишем для груза 4 основное уравнение динамики поступательного движения – второй закон Ньютона:

$$mg - T = ma,$$

где a – ускорение груза массой m ;

g – ускорение свободного падения.

Груз начинает движение из состояния покоя (в начале он неподвижно стоит на полочке б). Из кинематики равноускоренного движения состояния покоя ускорение груза вычисляется как

$$a = \frac{2h}{t^2}, \quad (2.21)$$

где t – время опускания груза массой m ;

h – высота, на которую был поднят груз.

Выразим силу натяжения нити

$$T = mg - ma = m(g - a).$$

Тогда момент силы натяжения нити

$$M = m(g - a)r.$$

С учетом выражения (2.21) для ускорения a , момент силы натяжения нити примет вид

$$M = m \left(g - \frac{2h}{t^2} \right) r. \quad (2.22)$$

Ускорение опускания вниз груза 4 на нити равно величине тангенциального ускорения a_τ точек на ободе вала:

$$a_\tau = a = \frac{2h}{t^2}.$$

Воспользуемся связью между тангенциальным ускорением и угловым

$$a_\tau = r\varepsilon.$$

Для углового ускорения вала получим

$$\varepsilon = \frac{2h}{rt^2}. \quad (2.23)$$

Когда груз 4 на нити опустится с высоты h вниз, нить отцепляется от вала, то маховик продолжает вращаться только под действием тормозящего момента силы трения $M_{\text{тр}}$. Следовательно, основное уравнение динамики вращательного движения в этом случае примет вид

$$M_{\text{тр}} = J\varepsilon_0,$$

где ε_0 – угловое ускорение вращения маховика под действием момента силы трения $M_{\text{тр}}$.

Пусть время вращения маховика под действием момента силы трения $M_{\text{тр}}$ до полной остановки – τ , а начальная угловая скорость вращения маховика – ω_0 . Маховик под действием момента силы трения $M_{\text{тр}}$ совершает равнозамедленное движение до полной остановки. Тогда

$$\omega = \omega_0 - \tau\varepsilon_0 = 0, \quad \varepsilon_0 = \frac{\omega_0}{\tau}.$$

Момент силы трения $M_{\text{тр}}$ будет равен

$$M_{\text{тр}} = J \frac{\omega_0}{\tau}. \quad (2.24)$$

За время t раскручивания маховика при опускании груза 4 точки на ободе вала приобретут линейную скорость

$$v_0 = a_{\tau} t,$$

где a_{τ} — тангенциальное ускорение точек на ободе вала.

Используя связь угловой ω_0 и линейной v_0 скоростей точек на ободе вала $v_0 = r\omega_0$, можно записать

$$\omega_0 = \frac{v_0}{r}, \quad \omega_0 = \frac{a_{\tau} t}{r}.$$

Тогда с учетом выражения (2.21) получим

$$\omega_0 = \frac{2h}{rt}. \quad (2.25)$$

Подставляя выражение (2.25) для угловой скорости ω_0 в формулу для момента силы трения (2.24), получим

$$M_{\text{тр}} = J \frac{2h}{r\tau t}.$$

Подставив выражения для углового ускорения, момента силы натяжения и тормозящего момента в основное уравнение динамики вращательного движения маховика (2.20), получим

$$m \left(g - \frac{2h}{t^2} \right) r - J \frac{2h}{r\tau t} = J \frac{2h}{rt^2}.$$

Из последнего выражения находим момент инерции маховика

$$J = \frac{m \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) r^2}{1 + \frac{t}{\tau}}. \quad (2.26)$$

Формула (2.26) является *рабочей формулой для* определения момента инерции маховика в данной работе.

Таким образом, чтобы определить момент инерции маховика, необходимо экспериментально измерить время t опускания груза на нити, раскручивающего маховик, а также время вращения маховика τ до его полной остановки после сбрасывания груза и нити.

2.7. Порядок выполнения работы

Задание 1. Определение момента инерции маховика без грузов.

1. Убедитесь, что на маховике отсутствуют грузы. Если грузы не сняты со стержней маховика, то снимите их, открыв барашки грузов.

2. На обоих секундомерах (левый секундомер C_1 измеряет время падения груза, правый секундомер C_2 – время вращения маховика) установите нулевые показания, передвигая штифты вниз.

3. Проверьте, что выключатели обоих секундомеров находятся в крайнем нижнем положении: C_1 – в положении “СЕТЬ”, C_2 – в положении “ПУСК”.

4. Нить с петлей, на конце которой привязан груз массой m , проденьте сквозь проем в открытой полке и петлю нити наденьте на шрифт вала маховика. Штифт при этом от нити должен располагаться слева.

5. В один слой намотайте нить на вал, вращая его в направлении стрелки, нарисованной на конце вала.

6. Переведите переключатель «СЕТЬ» секундомера C_1 в верхнее положение «ВКЛ» и таким образом включите электромагнит установки, удерживающий груз в верхнем положении (груз лежит на поднятой вверх крышке столика электромагнита).

7. Перед запуском маховика в движение убедитесь, что конец нити натянут и занимает вертикальное положение.

8. Определите время опускания груза t и время вращения маховика τ от момента удара груза о нижнюю площадку установки до полной остановки маховика. Для этого переключатель «ПУСК» секундомера C_2 переведите в верхнее положение «ВКЛ». При этом размыкается цепь электромагнита, удерживающего груз в вертикальном положении, и одновременно с началом опускания груза включается электрический секундомер C_1 , измеряющий время t опускания груза.

9. При ударе груза о нижнюю площадку включится секундомер C_2 для измерения времени τ до полной остановки маховика.

10. В момент полной остановки маховика секундомер C_1 выключите переключателем «СЕТЬ», переведя его в крайнее нижнее положение. Затем переключатель «Пуск» секундомера C_2 переведите в нижнее положение.

11. Измерьте по секундомеру C_1 время падения груза t с точностью до 0,01 с и полученное значение занесите в табл. 1. По секундомеру C_2 измерьте время τ с точностью до 1 с и результат запишите в табл. 1.

Таблица 1

$$m = 0,343 \text{ кг}, h = 0,88 \text{ м}, r = 0,018 \text{ м}$$

$t, \text{ с}$	$\tau, \text{ с}$	$J, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

12. По данным табл. 1 вычислите момент инерции маховика по формуле

$$J = \frac{m \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) r^2}{1 + \frac{t}{\tau}}.$$

Полученные значения занесите в табл. 1.

Задание 2. Исследование зависимости момента инерции маховика с грузами от распределения массы относительно оси вращения.

1. Наденьте цилиндрические грузы на стержни так, чтобы дальние от оси вращения торцы грузов совпадали с метками, нанесенными на стержнях на расстоянии 10 см от поверхности вала (первая метка на стержне от оси вала).

2. Убедитесь, что маховик находится в состоянии безразличного равновесия (в такое состояние его приводят, перемещая грузы на стержнях на небольшие расстояния). Надежно закрепите грузы. Плоскости барашек грузов должны быть расположены вдоль стержней, чтобы маховик свободно вращался. При таком расположении грузов расстояние R от оси вращения до центра тяжести каждого из грузов равно 10 см.

3. Проведите опыт по измерению времени t и τ , как в задании 1, и результаты запишите в табл. 2.

4. Располагая грузы на расстоянии R , равном 15 см, 20 см и 25 см, произведите измерения времени t и τ и запишите результаты в табл. 2. При этом ориентируйтесь по меткам на стержнях и считайте, что соседние метки располагаются через 5 см друг от друга.

Таблица 2

№ измерения	R , м	t , с	τ , с	J , кг·м ²
1				
2				
3				
4				

5. Вычислите моменты инерции J по формуле

$$J = \frac{m \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) r^2}{1 + \frac{t}{\tau}}.$$

6. По значениям табл. 2 постройте график зависимости момента инерции J от расстояния R грузов на стержнях до оси вращения $J=f(R)$. Убедитесь в параболическом характере этой зависимости, т. е. $J \sim R^2$.

2.8. Контрольные вопросы

1. Дайте определение момента силы и момента импульса материальной точки относительно неподвижной точки.
2. Как определяются модуль момента силы и момента импульса материальной точки относительно неподвижной точки?
3. Сформулируйте правило буравчика для определения направления момента силы и момента импульса материальной точки относительно неподвижной точки. Покажите на примерах применение правила.

4. Как определяется момент силы относительно произвольной оси?
5. Опишите основные способы определения момента силы относительно произвольной оси.
6. Дайте определение момента инерции материальной точки.
7. Как определяется момент инерции твердого тела относительно произвольной оси?
8. Получите формулу для момента инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс.
9. Сформулируйте теорему Штейнера. Приведите пример ее применения.
10. Выведите формулу для основного уравнения динамики вращательного движения материальной точки.
11. Выведите формулу для основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела.
12. Что собой представляет маховик в данной работе? Опишите условия проведения эксперимента. Запишите рабочую формулу и поясните ее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник задач по общему курсу физики. Механика. Статистическая физика и термодинамика. В 2 ч. Ч. 1 / П. Г. Кужир, Н. П. Юркевич и Г. К. Савчук. – Минск: БНТУ, 2014. – 219 с.

2. Физика. Ч. 1. Механика : учебно-методический комплекс для студентов специальностей 1-70 04 01 "Водохозяйственное строительство", 1-70 04 02 "Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна", 1-70 04 03 "Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов", 1-70 07 01 "Строительство тепловых и атомных электростанций", 1-37 03 02 "Кораблестроение и техническая эксплуатация водного транспорта", 1-70 02 01 "Промышленное и гражданское строительство", 1-70 01 01 "Производство строительных изделий и конструкций", 1-70 02 02 "Экспертиза и управление недвижимостью" / кол. авт. Белорусский национальный технический университет, Кафедра "Физика", сост. Кужир П. Г., сост. Юркевич Н. П., сост. Савчук Г. К., сост. Библик А. И., сост. Климович И. А., сост. Журавкевич Е. В., сост. Иванов А. А., сост. Баранов А. А., сост. Позняк В. С., сост. Потачиц В. А., сост. Попко С. В. – Электрон. дан. – БНТУ, 2013.

3. Джеммер, М. Понятие массы в классической и современной физике / М. Джеммер. – 2003. – 256 с.

4. Детлаф, А. А. Курс физики: в 3 т. / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М.: Высшая школа, 1973. – Т. 1. – 384 с.

5. Сивухин, Д. В. Общий курс физики: в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М.: Физматлит, 2019. – Т. 1. – 544 с.

6. Матвеев, А. Н. Курс общей физики: в 5 т. / А. Н. Матвеев. – М.: Оникс 21 век, 2003. – Т. 1. – 432 с.

7. Савельев, И. В. Курс общей физики. Механика / И. В. Савельев. – М.: АСТ-Астрель, 2004. – Кн. 1: Механика. – 336 с.

Учебное издание

ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Пособие

для студентов специальностей

1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,

1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция
и охрана воздушного бассейна»,

1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение
и охрана водных ресурсов»,

1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»

В 3 частях

Часть 2

Составители:

ЕСМАН Александр Константинович

КУЖИР Павел Григорьевич

ЮРКЕВИЧ Наталья Петровна и др.

Редактор *Е. О. Германович*

Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 23.03.2020. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 3,37. Уч.-изд. л. 2,64. Тираж 100. Заказ 476.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.